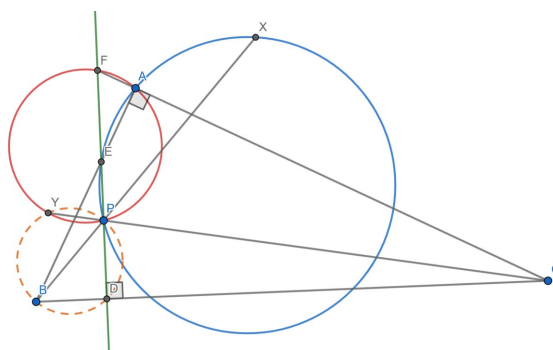


به نام خدا

راه حل سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۴۰۲

(۱) در مثلث ABC می دانیم، $\angle A = 90^\circ$. نقطه ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می نامیم. PD ، خطوط AB ، AC را به ترتیب در E ، F قطع می کند. همچنین دایره های APE و APF به ترتیب BP را در X و CP را در Y قطع می کنند. ثابت کنید PD ، BY ، CX همسره هستند.



راه حل:

چهارضلعی $AFYP$ محاطی است. با نوشتن قوت C نسبت به این دایره داریم:

$$CA \cdot CF = CP \cdot CY$$

از طرفی دیگر چون $\angle FAB = \angle FDB = 90^\circ$ ، چهارضلعی $FADB$ نیز محاطی است. قوت نقطه‌ای C نسبت به این دایره برابری زیر را می دهد.

$$CA \cdot CF = CD \cdot CB \implies CD \cdot CB = CP \cdot CY$$

در نتیجه چهارضلعی $YPDB$ محاطی است.

$$\angle PYB + \angle PDB = 180^\circ \implies \angle CYB = 90^\circ$$

به طور مشابه می توان ثابت کرد $\angle BXC = 90^\circ$. از این دو رابطه‌ی آخر می توان نتیجه گرفت BY ، CX ، ارتفاع‌های راس‌های B ، C ، P در مثلث BCP هستند. پس این سه خط در مرکز ارتفاعی BPC همسره هستند.

۲) ثابت کنید به ازای هر $2 \leq n \in \mathbb{N}$ یک n -تایی مرتب $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یکدیگر اول وجود دارد که همگی از 1402 بزرگتر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$\left[\frac{a_1}{a_2}\right] + \left[\frac{a_2}{a_3}\right] + \dots + \left[\frac{a_n}{a_1}\right] = \left[\frac{a_2}{a_1}\right] + \left[\frac{a_3}{a_2}\right] + \dots + \left[\frac{a_1}{a_n}\right]$$

(منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیح است که کوچکتر یا مساوی x باشد)

راه حل:

ابتدا دقت کنید اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ اعدادی طبیعی باشند که $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ و

$$\frac{a_2}{a_1} < 2, \frac{a_3}{a_2} < 2, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} < 2$$

و همچنین داشته باشیم $n < \frac{a_n}{a_1} < n+1$ ، آن گاه اعداد $a_1, \dots, a_n$ در رابطه سوال صدق می کنند. پس کافی است چنین اعدادی بیابیم که نسبت به هم اول باشند. برای یافتن این اعداد از لم زیر استفاده می کنیم:

لم. اگر c, c' اعدادی گویا و p, p' اعدادی اول و متفاوت باشند، آن گاه برای اعداد به اندازه کافی بزرگ مانند N اعداد $c \times N! + p, c' \times N! + p'$ نسبت به هم اول هستند.

فرض کنید $c = \frac{u}{v}, c' = \frac{u'}{v'}$ و فرض کنید $N > 2\max(u'vp, uv'p')$ در این صورت اگر قرار دهیم $d = (cN! + p, c'N! + p')$ داریم:

$$d|(u'v(cN! + p), uv'(c'N! + p')) = (uu'N! + u'vp, uv'N! + uv'p')|u'vp - uv'p$$

بنابراین داریم $d < \max(u'vp, uv'p')$ در نتیجه

$$d|cN!, c'N!$$

از طرفی

$$d|cN! + p, c'N! + p'$$

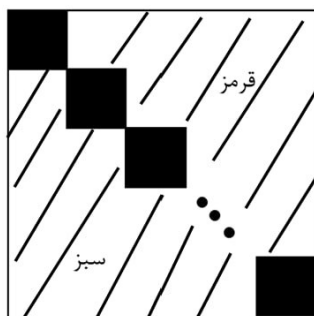
با کم کردن این روابط داریم $d|p, p'$ بنابراین $d = 1$.

اکنون به ساختن اعدادی نسبت به هم اول می پردازیم که در نامساوی های گفته شده در ابتدای راه حل صدق کنند. فرض کنید $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، عدد اول ابتدایی باشند و $c_1, c_2, \dots, c_n$ اعدادی گویا و دلخواه باشند که

$$1 < c_1, c_2, \dots, c_n < 2, n < c_1 c_2 \dots c_n < n+1$$

آنگاه کافی است برای N به اندازه کافی بزرگ قرار دهیم: $a_i = c_i \times N! + p_i$

۳) یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، خانه‌ی سطر i -ام و ستون j -ام را با قاعده‌ی زیر رنگ می‌کنیم:



۱. اگر $j = i$ ، سیاه

۲. اگر $j < i$ ، قرمز

۳. اگر $j > i$ ، سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می‌نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می‌کنیم و n -تایی مرتب $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ را یادداشت می‌کنیم. با تکرار این کار به چند n -تایی مرتب مختلف می‌توانیم برسیم؟ (در یک n -تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند)

راه حل:

به خانه‌های غیر سیاه روی قطر اصلی خانه‌های رنگی می‌گوییم. ادعا می‌کنیم می‌توان با حرکت مجاز مساله به یک رنگ‌آمیزی قطر اصلی رسید اگر و فقط اگر در این رنگ‌آمیزی، اولین خانه رنگی روی قطر اصلی قرمز و آخرین خانه رنگی روی قطر اصلی سبز باشد. برای اثبات این ادعا ابتدا توجه کنید که شماره سطرها بعد از انجام عمل جابجایی یک جایگشت از اعداد طبیعی کوچکتر از n تشکیل می‌دهند، اگر هر جایگاه این جایگشت را به رنگ خانه قطر اصلی متناظر در بیاوریم مشاهده می‌کنیم که مساله ما با مساله زیر معادل است:

جایگشتی از اعداد طبیعی کوچکتر از n مانند a_i داده شده است، اگر $a_i < i$ جایگاه i ام را سبز، اگر $a_i = i$ این جایگاه را سیاه و اگر $a_i > i$ این جایگاه را قرمز می‌کنیم. تعداد رنگ‌آمیزی‌های مختلفی که به ازای $n!$ جایگشت متفاوت می‌تواند ایجاد شود را بیابید.

حال به اثبات ادعا برای مساله معادل می‌پردازیم: واضح است که هر رنگ‌آمیزی مجاز باید شرایط گفته شده را داشته باشد، فرض کنید یک رنگ‌آمیزی داریم که اولین جایگاه رنگی آن قرمز و آخرین جایگاه رنگی آن سبز باشد. این رنگ‌آمیزی را می‌توان به تعدادی بلوک متوالی سیاه و قرمز و سبز تقسیم کرد که اولین بلوک رنگی قرمز و آخرین بلوک رنگی سبز است. حال می‌خواهیم جایگشتی متناظر با این رنگ‌آمیزی بسازیم: اگر جایگاه i ام سیاه باشد عدد i را در این جایگاه قرار دهید. با حذف این جایگاه‌ها کافی است مساله را برای حالتی حل کنیم که خانه سیاهی در رنگ‌آمیزی وجود ندارد. فرض کنید $j, i+1, \dots, i$ یک بلوک قرمز $j+1, j+2, \dots, j+t$ یک بلوک سبز بعدی باشد

قرار دهید

$$a_i = i + 1, a_{i+1} = i + 2, \dots, a_{j-1} = j$$

و $a_j = j + t, a_{j+1} = i$ هم‌چنین قرار دهید $a_{j+2} = j + 1, a_{j+3} = j + 2, \dots, a_{j+t} = j + t - 1$ روشن است که این جایگشت رنگ‌آمیزی خواسته‌شده را تولید می‌کند.
حال می‌خواهیم تعداد این رنگ‌آمیزی‌ها را بشماریم. ابتدا دقت کنید تعداد رنگ‌آمیزی‌های مورد نظر با $k < n - 2$ خانه سیاه برابر است با $\binom{k}{n} 2^{n-k-2}$ است بنابراین تعداد کل رنگ‌آمیزی‌های مطلوب برابر است با

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{k}{n} 2^{n-k-2} = \frac{(2+1)^n - 2n - 1}{4} + 1 = \frac{3^n - 2n - 1}{4}$$

۴) عدد طبیعی n داده شده است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه‌های یک جدول $3 \times k$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲. و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \dots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

راه حل:

ادعا می‌کنیم جواب $\frac{3(n+1)}{2}$ است. ابتدا مثالی از چنین جدولی ارایه می‌کنیم، فرض کنید $n = 2t + 1$ سه جدول $3 \times (t + 1)$ زیر را در نظر بگیرید

.	.	...	.	.
.	۱	...	$t - 1$	t
$2t + 1$	$2t$	...	$t + 2$	$t + 1$

.	۱	...	$t - 1$	t
$2t + 1$	$2t$	...	$t + 2$	$t + 1$
.	.	...	.	.

$2t + 1$	$2t$	...	$t + 2$	$t + 1$
.	.	...	.	.
.	۱	...	$t - 1$	t

جدولی که از چسباندن این سه جدول به دست می‌آید خواص مورد نظر را دارد. حال نشان می‌دهیم که جدول کوچکتری با خواص مطلوب وجود ندارد:

روش اول:

فرض کنید جدولی $3 \times k$ وجود داشته باشد، در هر سطر اعداد $1, 2, \dots, n$ وجود دارد پس جمع خانه‌های جدول حداقل برابر با $\frac{3n(n+1)}{2}$ است. از طرفی با محاسبه ستونی جمع خانه‌های جدول دقیقاً برابر است با kn . بنابراین داریم $kn \geq \frac{3n(n+1)}{2}$.

روش دوم:

از آن جا که جمع هر ستون $2t + 1$ است، هیچ دو عددی از مجموعه $\{t + 1, t + 2, \dots, 2t + 1\}$ نمی‌توانند در یک ستون قرار گیرند. از آن جا که این اعداد باید در هر سه سطر بیایند پس حداقل $3t$ ستون نیاز داریم.

(۵) یک دنباله $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدر نسبت $Q(x)$ می‌گوییم هر گاه برای هر n , $P_{n+1} = P_n + Q$.

فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله‌ی اول $P(x)$ داریم به طوری که P و Q چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه‌ی مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه‌ی صحیح دارد. ثابت کنید $P(x) - \bar{A} Q(x)$ بخش پذیر است.

ب- چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

راه حل:

فرض کنید P, Q دو چندجمله‌ای هستند که تصاعد با جمله اول P و قدر نسبت Q در شروط مساله صدق می‌کند. ابتدا نشان می‌دهیم مجموعه ریشه‌های صحیح $\{P + nQ | n \in \mathbb{N}\}$ بی کران است. برای اثبات این موضوع توجه کنید برای $m \neq n$ چندجمله‌ای‌های $P + nQ, P + mQ$ ریشه مشترکی ندارند چرا که اگر x ریشه مشترک این دو چندجمله‌ای باشند داریم

$$0 = P + mQ(x) - P + nQ(x) = (m - n)Q(x) = 0 \rightarrow Q(x) = 0 \rightarrow P(x) = 0$$

که تناقض است.

حال فرض کنید معادله $P + nQ(x) = 0$ ریشه صحیح داشته باشد، این موضوع معادل این است که معادله $\frac{P}{Q}(x) = -n$ ریشه صحیح داشته باشد. بنا بر امتحان تقسیم

$$P = TQ + R$$

که T خارج قسمت تقسیم و R باقی‌مانده است و درجه‌ی R از درجه‌ی Q کمتر است. از آن جا که Q تکین است روشن است که تمام ضرایب T صحیح هستند حال فرض کنید $\frac{P}{Q}(x) = -n$ بنابراین

$$T(x) + \frac{R}{Q}(x) = -n$$

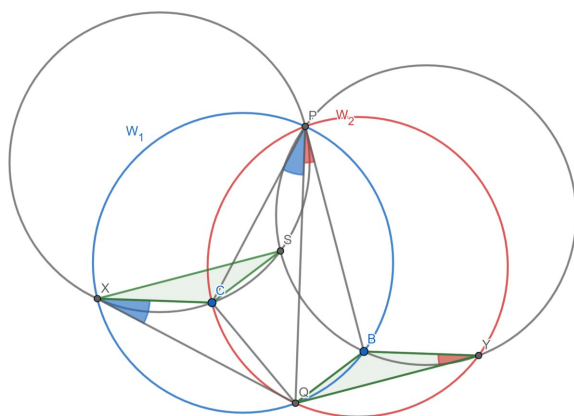
از آن جا که $T(x)$ عددی صحیح است پس $\frac{R}{Q}(x)$ هم عددی صحیح است. از طرفی دیدیم x می‌تواند به دلخواه بزرگ باشد بنابراین چون درجه R از درجه Q کمتر است برای x به اندازه کافی بزرگ داریم $|\frac{R}{Q}(x)| < 1$ که نتیجه می‌دهد $\frac{R}{Q} = 0$ و P بر Q بخش پذیر است.

حال تصاعدی با جمله اول $P' = \frac{P}{Q}$ و قدر نسبت 1 در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم این تصاعد هم در خولص مساله صدق می‌کند چرا که هر ریشه صحیح $P + nQ$ ریشه صحیح $P' + n$ هم هست (چون Q و $P + nQ$ ریشه صحیح مشترکی ندارند).

بنابراین برای هر n صحیح معادله $P'(x) = n$ باید یک ریشه صحیح داشته باشد. اگر درجه P' بزرگتر از ۲ باشد، از جایی به بعد $P'(x+1) > P'(x) + 1$ بنابراین اگر $P'(x) = n$ باشد معادله $P'(x) = n+1$ نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد. بنابراین درجه P' برابر ۱ است.

قسمت آخر استدلال را به روش‌های دیگری هم می‌توان انجام داد، مثلاً به راحتی می‌توان دید $P' + n$ باید ریشه صحیحی بزرگتر از $\frac{n}{2}$ داشته باشد بنابراین از جایی به بعد $|P'(\frac{n}{2})| < n$ که برای چندجمله‌ای‌های درجه دو به بالا غیر ممکن است.

۶ دو دایره W_1, W_2 با شعاع های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه های B و C روی دایره های W_2 و W_1 طوری قرار دارند که به ترتیب داخل دایره های W_1 و W_2 هستند. همچنین نقطه های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_2 و W_1 طوری قرار دارند که $\angle BPQ = \angle BYQ$ و $\angle CPQ = \angle CXQ$. محل برخورد دایره های محیطی مثلث های XPC و YPB را S می نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS همبرس هستند.
راه حل:



چون شعاع دایره ها یکسان هستند، می دانیم

$$\angle PYQ = \angle PXQ, \angle PCQ = \angle PBQ$$

گام ۱: X مرکز ارتفاعی PCQ است.

اگر مرکز ارتفاعی PCQ را X' بنامیم، می دانیم $\angle CX'Q = \angle CPQ$ و $\angle PX'Q = 180 - \angle PCQ = 180 - \angle PBQ$. پس X' هم روی دایره PBQ است هم شرط زاویه ای X را دارد. طبق تعریف X, X' داریم $X = X'$.

به طور مشابه می توان گفت Y مرکز ارتفاعی PBQ است.

گام ۲: $CX \parallel BY$ و $CX = BY$.

از آن جایی که X مرکز ارتفاعی PCQ و Y مرکز ارتفاعی PBQ است، داریم:

$$CX \perp PQ, BY \perp PQ \implies CX \parallel BY$$

اگر O_1 مرکز W_1 و O_2 مرکز W_2 باشد، دایره W_1 را با یک انتقال با بردار $\overrightarrow{O_1O_2}$ می توان بر W_2 منطبق کرد. چون $O_1O_2 \perp PQ$ ، نتیجه می شود $CX \parallel O_1O_2$ پس بردار $\overrightarrow{XC}$ همان بردار انتقال است و $CX = O_1O_2$. به طور مشابه $O_1O_2 = YB$. این برابری مطلوب ما را اثبات می کند.

گام ۳: $SX \parallel QY$ و $SX = QY$.

برای اثبات این گام تغییر حکم می دهیم. S' را نقطه ای در نظر بگیرید که $S'XQY$ متوازی الاضلاع شود. خواهیم داشت $S'X = QY$ و $S'X \parallel QY$. همچنین به دلیل برابری دو ضلع و زاویه

بین (که با استفاده از توازی دو ضلع می توان آن را نتیجه گرفت) دو مثلث $S'XC$ و QYB همنهشت هستند.

$$S'XC \cong QYB \implies \angle XS'C = \angle BQY = 90 - \angle PYQ = 90 - \angle PXQ \\ = \angle XPC$$

این برابری محاطی بودن $PS'CX$ را نتیجه می دهد. به طور مشابه $S'PYB$ نیز محاطی است و طبق تعریف $S' = S$.

گام ۴: وسط های SQ, BC, XY یکی هستند.

به دلیل برابری و توازی دو ضلع رو به رو چهارضلعی های $SCQB$ و $SXQY$ متوازی الاضلاع هستند. می دانیم در یک متوازی الاضلاع قطر ها یک دیگر را نصف می کنند. پس وسط های سه پاره خط SQ, BC, XY همگی یک نقطه هستند. از این گام حکم سوال نتیجه می شود.